II. *De Menſura & Motu Aquarum fluentium.*

Tentamen Primum.

Quo agitur de aqua effluente ex vaſe ſemper pleno per foramen rotundum, & de reſiſtentia ejuſdem ex defectu lubricitatis oriunda. *Auctore* Jacobo Jurin, *Soc. Reg. & Colleg. Medic.* Londinenſ. *Sodale.*

AQuarum fluentium *Menſuram* veteres nullam habuerunt, niſi incertam illam & fallacem, quæ, nulla velocitatis habita ratione, ſola rivi ſectione perpendiculari nitebatur. Ad veram aditum primus aperuit, centum circiter abhinc annis, *Benedictus Caſtellus, Italus, Galileo* familiaris. Is quum comperiſſet copiam aquæ per datam rivi ſectionem transfluentis, datam non eſſe, quod veteres crediderant, ſed proportionalem celeritati qua fertur aqua per datam ſectionem, nobili hoc invento novæ & utiliſſimæ fundamenta ſcientiæ jecit, Hydraulicæ. Hoc itaque auctore philoſophi certatim in eam diſciplinam excolendam incubuerunt, ut nemo pene fuerit a *Caſtelli* temporibus mathematicus paulo inſignior; quin aliquid operæ ad ejus incrementum contulerit, ſive experimentis inſtituendis, ſive rationibus & argumentis a priori excogitandis.

At pleriſque, utut magnis viris, propter ſummam operis difficultatem, parum feliciter res proceſſit. Nam & theoriam excolentes ea tradiderunt theoremata, quibus facto periculo refragare deprehenditur experientia; & qui experimentis capiendis operam dede-

dederunt, cum animum non adverterent ad circumſtantias quaſdam minutiores, quod iis quid momenti ineſſet nondum erat compertum, inde factum eſt, ut tum ſinguli magnopere inter ſe diſſideant, tum ab illa *Menſura*, quæ reperiri debuerat, pene omnes inſigniter aberrârint.

Cujus rei non aliud luculentius dari poteſt exemplum, quam ſimplex illud omniumque facillimum, quod reliquis fere univerſis pro fundamento eſſe conſuevit, quodque nos idcirco diligentius pertractandum ſuſcepimus, ubi aqua ex vaſe conſtanter pleno, conſtanti velocitate, per foramen circulare in fundo factum decurrit. Hic enim ex omnibus unus *Polenus* veram tradidit aquæ effluentis *Menſuram*, aut eam ſaltem, quæ ad veram proxime accedit: unus *Newtonus* verum poſuit ejus *Menſuræ* indagandæ fundamentum; verum, at a pleriſque repudiatum; a quibuſdam, diſſimulato auctoris nomine, pro ſuo venditatum.

His itaque duobus ducibus rem aggredimur, & primo quidem loco, phænomenωn nomine proponemus ea, quæ aut ipſis experimentis comparent, aut ex iiſdem, certiſſimis argumentis confirmantur: deinde ad eorum phænomenωn ſolutionem accedemus.

Phænomena effluxus aquæ ex foramine in fundo vaſis conſtanter pleni.

1. Data altitudine aquæ & tempore effluendi, *Menſura* aquæ effluentis eſt fere in ratione foraminis.

2. Data altitudine aquæ & foramine, *Menſura* aquæ effluentis eſt in ratione temporis effluendi.

3. Dato tempore effluendi & foramine, *Mensura* aquæ effluentis est fere in ratione subduplicata altitudinis aquæ.

4. *Mensura* aquæ effluentis est fere in ratione composita ex ratione foraminis, ratione temporis, & ratione subduplicata altitudinis aquæ.

5. *Mensura* aquæ dato tempore effluentis longe minor est ea, quæ ex Mathematicorum theorematis vulgo elicitur. Ea nempe vulgo habetur aquæ effluentis velocitas, quam acquirat in vacuo corpus grave cadendo ex integra altitudine aquæ supra foramen; & hoc posito, si area foraminis vocetur F, A altitudo aquæ supra foramen, V velocitas quam comparat corpus grave cadendo in vacuo ex ista altitudine, T tempus cadendi, & effluat aqua constanti hac velocitate V, per tempus T, erit $2A$ longitudo columnæ aqueæ, quæ eo tempore effluit; eritque ejus *Mensura* $2AF$. At si accuratissima * *Poleni* experimenta ad calculum revoces, copiam aquæ, quæ eo tempore effluit, non nisi $\frac{571}{1000}$ circiter hujus *Mensuræ* $2AF$ conficere perspicies.

Hujus autem viri illustrissimi experimenta, cum propter summam ejus diligentiam, & accurationis studium, tum alio etiam nomine, reliquorum omnibus omnium præferenda censeo. Is siquidem deprehendit copiam aquæ effluentis ex vase per tubum cylindricum, eam quæ exiret per foramen circulare in tenui lamina factum, pari existente diametro tubi & foraminis, & pari altitudine aquæ ambobus incum-

* Polenus de Castellis, *Art.* 35, 38, 39, 42, 43.

bentis,

bentis, longe ſuperare. Idque ita ſe habere cognovit, cum tubus non fundo quidem, quod alii prius animadverterant, ſed lateri vaſis insereretur.

Eſt autem foramen vel in tenui lamina factum, pro brevi tubo cylindrico habendum. Unde patet majorem aquæ copiam ex foramine in lamina tenui facto profluere, quam quæ effluxura fuiſſet, ſi, quod aiunt, infinite parva fuiſſet laminæ craſſities. Cujuſmodi lamina cum neque haberi, nec etiam cogitatione concipi queat, relinquitur ut augeamus diametrum foraminis, quo laminæ craſſities, quam fieri commode poteſt, minimam rationem obtineat ad foraminis diametrum.

Id vero magno cum judicio præſtitit *Polenus*, cum uteretur diametro linearum 26, lamina autem non integram lineam craſſa; cum ante eum vix quiſquam adhibuerit diametrum 6 aut 7 lineas ſuperantem; aut omnino animum adverterit ad laminæ vel fundi vaſis craſſitiem, niſi quod unus *Newtonus*, pro ſumma ſua providentia, ſeſe lamina pertenui uſum fuiſſe ſcribat.

Nec foraminum ſolum, ſed vaſorum etiam amplitudini *Polenus* ſupra omnes proſpexit, quo aqua liberrime & quam minimo cum impedimento verſus foramen deſcenderet; ut nullus dubitandi locus ſit, quin *Menſuræ* ab eo captæ propius longe quam ullæ a reliquis traditæ ad verum accedant.

6. Cum, ut modo vidimus, *Menſura* aquæ effluentis prædicto tempore T, ſit $2\,AF \times \frac{571}{1000}$, eſt longitudo columnæ aqueæ, quæ eo tempore effluit, $2\,A \times \frac{571}{1000}$. Itaque, ſi particulæ aqueæ, quæ eodem temporis

poris puncto in foramine versantur, singulæ pari velocitate prosiliant, liquet communem omnium velocitatem eam esse, qua percurratur tempore T spatium $2A \times \frac{571}{1000}$, sive velocitatem $V \times \frac{571}{1000}$. Hæc autem ea est, quacum aqua in vacuo prosilire possit ad tertiam fere partem altitudinis aquæ supra foramen.

7. Atqui, cum sursum vertitur aquæ motus, ut in fontibus salientibus, prosilire cernuntur fontes ad altitudinem aquæ in cisterna pene integram. Prosilit ergo ex foramine aqua, aut aliqua saltem aquæ portio, cum velociate V pene integra, certe velocitate multo majori quam $V \times \frac{571}{1000}$.

8. Hinc certissime liquet particulas aqueas, quæ eodem temporis puncto in foramine versantur, non omnes erumpere cum eadem velocitate, sive nullam esse velocitatem omnibus communem. Contrarium hactenus pro indubitato habuerunt Mathematici.

9. Ad parvam a foramine distantiam, venæ aqueæ erumpentis diameter multo minor est diametro foraminis. Nempe, si foraminis diameter sit 1, erit venæ aqueæ diameter $\frac{21}{25}$, sive 0,84 mensurante *Newtono*, qui mirabile hoc phænomenon primus animadvertit; ex mensuris *Poleno* captis erit $\frac{20}{26}$, vel $\frac{20,5}{26}$; hoc est, si diametrum intermediam ceperis, 0,78 fere.

His expositis, progrediendum est deinceps ad solutionem horum phænomenωn expediendam: id vero antequam fiat, ex usu erit lectorem pauca præmonere.

 1. Aquam

1. Aquam nos non aliter consideramus, quam ut corpus fluidum, continuum, cujus partes vi minimæ illatæ cedunt, & cedendo moventur inter se.

2. Per aquam effluentem intelligimus eam aquæ copiam, quæ actu ex foramine egreditur: Quod, etsi minus necessarium videri possit, monendum tamen idcirco duximus, quod in *Dissertatione* nostra *de Motu aquarum fluentium* ante annos circiter 24 *Actis Philosophicis* inserta, aquæ defluentis nomine designata fuerit tota illa aquæ copia, quæ intra vas in motu constituta est, & versus foramen descendit.

3. Vasis amplitudinem pro infinita habemus, aut tanta saltem, ut in eo decrementum altitudinis aquæ toto temporis spatio, quo aqua ex foramine effluit, sensu percipi nequeat.

4. Aquam consideramus ut effluentem constanti velocitate. Nimirum ipso motus initio per minimum temporis spatium effluit aqua minori velocitate, quam mox elapsura sit. Nos autem ipsum motus initium præterimus, & tum demum investigamus aquæ *Mensuram* & *Motum*, cum integram velocitatem, quanta fieri potest, comparaverit. Hæc autem constans sit, necesse est, dum constet aquæ superincumbentis altitudo.

5. Fundum vasis non aliter concipimus quam ut planum mathematicum, vel laminam saltem eatenus tenuem, ut ejus crassities quasi nulla sit respectu diametri foraminis.

6. Per *Mensuram aquæ effluentis* in sequentibus semper intelligimus eam aquæ copiam, quæ ex foramine erumpit illo temporis spatio, quo corpus grave in vacuo cadens percursurum sit altitudinem aquæ supra foramen.

7. Per

7. Per *Motum aquæ effluentis* intelligimus ſummam motuum omnium aquæ particularum, quæ ſupradicto temporis ſpatio ex foramine erumpunt. Motus vero cujuſque particulæ eſt, ut factum ex ipſa particula & velocitate quacum ex foramine erumpit.

8. Quo facilius animo concipiantur ſequentia, caſus ſimpliciores primo proponemus, deinde ad magis compoſitos, ſed propius ad verum rerum ſtatum accedentes, progrediemur.

Nempe in problemate primo, quo ſimplicior evadat ſolutio, ponimus aquam ex foramine in vacuum effluere, aqueaſque particulas, dum verſus foramen deſcendunt, omni carere reſiſtentia ex defectu lubricitatis oriunda.

In ſecundo & tertio problemate ponitur adhuc effluxus aquæ in vacuo inſtitui; ſed concipimus particulas aqueas, dum verſus foramen deſcendunt, nonnullam ex defectu lubricitatis experiri reſiſtentiam, tantulam tamen, ut decrementum *Motus* aquæ ex foramine effluentis, exinde ortum, pro nihilo haberi poſſit.

In quarto & quinto, vacui poſitionem adhuc retinemus; at ſenſibile ponitur decrementum *Motus* aquæ effluentis, ex defectu lubricitatis.

Tandem in problemate ſexto & ſequentibus rem conſideramus prout revera ſe habet, cum in aëre res tranſigitur, adeo ut particulæ aqueæ reſiſtentiam ſenſibilem patiantur, non modo a ſeſe invicem per defectum lubricitatis, intra vas, ſed etiam poſt exitum e vaſe, per attritum aëris ambientis.

Problema I.

Definire Motum, Menſuram, *& velocitatem aquæ in vacuum effluentis per foramen in fundo vaſis, ubi particulæ aquæ nullam patiuntur reſiſtentiam ex defectu lubricitatis.*

Dum foramen obturaculo occluditur, ſuſtinet obturaculum pondus columnæ aqueæ ipſi ad perpendiculum incumbentis. Remoto obturaculo, columna aquæ foramini ad perpendiculum imminens, cum non amplius ſuſtineatur, preſſione ſua efficiet, ut aqua per foramen defluat, & poſtquam eam ad debitam velocitatem compulerit, deinceps conſtanti ſua preſſione conſtantem aquæ effluentis velocitatem conſervabit.

Concipiendum eſt quidem, *Motum* aquæ ex foramine effluentis non a pondere ſolius columnæ perpendicularis ortum ducere, ſed partim ex hujus columnæ preſſione, partim ex preſſione aquæ circumpoſitæ derivari. Sed hoc pacto neque major neque minor fit *Motus* aquæ effluentis, quam ſi ex preſſione ſolius columnæ perpendicularis oriretur: Non minor, quia preſſio columnæ perpendicularis, ſi non impediatur, *Motum* ſibi proportionalem generabit, impediri autem non poteſt niſi quatenus aqua circumpoſita urget aquam effluentem: non major, quia preſſio aquæ circumpoſitæ non poteſt aliquid conferre ad *Motum* aquæ effluentis, niſi tantundem demat ex preſſione columnæ perpendicularis.

Cauſa igitur adæquata *Motus* aquæ ex foramine effluentis, eſt preſſio ſive pondus columnæ aqueæ, quæ foramini inſiſtit. At vis data, quocunque modo ap-

applicetur, dato tempore datam generat *Motus* quantitatem versus easdem partes, quo tendit vis. Parem itaque *Motus* quantitatem dato tempore generat columnæ incumbentis pondus in aqua effluente, atque generare posset eodem tempore in ipsa columna libere per vacuum cadente.

Jam quoniam, per hypothesin, particulæ aqueæ nullam experiuntur resistentiam ex defectu lubricitatis, & omnes illæ particulæ, quæ jamjam exituræ in ipso foramine versantur, æquali urgentur pressione aquæ superincumbentis, liquet harum omnium æqualem esse velocitatem.

Sit v communis ista velocitas; a altitudo unde cadendo in vacuo comparetur ea velocitas; A altitudo aquæ supra foramen; V velocitas quæ comparetur cadendo in vacuo ex altitudine A; T tempus cadendi ex eadem altitudine; F area foraminis; & effluat aqua ex foramine per tempus T.

Jam quoniam tempore T velocitate V percurratur spatium $2A$, percurretur eodem tempore velocitate v spatium $\frac{2Av}{V}$. Hæc itaque erit longitudo columnæ aqueæ, quæ effluit ex foramine tempore T; eritque magnitudo hujus columnæ, sive *Mensura* aquæ effluentis tempore T, $\frac{2AvF}{V}$, & *Motus* ejusdem erit $\frac{2AFv^2}{V}$.

Motus autem, qui eodem tempore T, in columna aquea foramini insistente generari possit, si suo ipsius pondere per vacuum feratur, sic habetur.

Erit ejus velocitas V, & cum magnitudo ejusdem sit AF, erit ejus *Motus* AFV.

Atqui *Motus* iste, ex suprapositis, æqualis est *Motui* columnæ aqueæ effluentis tempore T, sive $AFV = \frac{2AFv^2}{V}$.

Hinc autem $V = \frac{2v^2}{V}$, sive $v^2 = \frac{V^2}{2}$, & $v = \frac{V}{\sqrt{2}}$.

Porro *Mensura* supraposita aquæ effluentis tempore T, sive $\frac{2AFv}{V} = \frac{2AF}{V} \times \frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{2AF}{\sqrt{2}} = AF \times \sqrt{2}$. *Q. E. I.*

COROLL. I. Cum sit $a : A :: v^2 : V^2$; erit $a = \frac{Av^2}{V^2}$, hoc est, $a = \frac{A}{V^2} \times \frac{V^2}{2}$, sive $a = \frac{A}{2}$. Itaque altitudo a, quam effluens aqua motu sursum verso attingere queat, dimidia est altitudo aquæ in vase supra foramen. Quæ est ipsa altitudo *Newtono* definita *Prop.* 36. *Lib.* II. *Princip.* Editionis primæ.

COROLL. II. Si tribuatur aquæ effluenti ea velocitas, quæ comparatur cadendo ex integra altitudine aquæ supra foramen, hoc est, si ponatur velocitas $v = V$, erit *Motus* aquæ supra definitus $\frac{2AFv^2}{V} = 2AFV$, sive duplus ejus *Motus*, qui a columna foramini incumbente generari possit, & proinde non nisi a duplo hujus columnæ generandus; quod docuit *Newtonus Corollario* secundo, *Prop.* 36. *Libr.* II. *Princip. Edit.* 2 & 3.

SCHO-

SCHOLIUM.

Mensura hic determinata, $\frac{2AF}{\sqrt{2}}$, sive $2AF \times 0{,}707$, ut longe deficit ab ea, quæ vulgo Mathematicis statuitur, nempe $2AF$, ita longe superat illam *Mensuram*, quam exhibent *Poleni* experimenta, sive $2AF \times 0{,}571$. Nec mirum: quod enim ponitur in hoc problemate, carere omni resistentia particulas aqueas inter defluendum, hypothesis est a vero rerum statu aliena.

PROBLEMA II.

Definire Motum, Mensuram *& velocitatem aquæ in vacuum effluentis per foramen circulare in medio fundo vasis cylindrici, ubi particulæ aquæ resistentiam patiuntur ex defectu lubricitatis, sed tam parvam, ut decrementum* Motus *aquæ effluentis exinde ortum pro nihilo haberi possit.*

Sit vas cylindricum immensum $ABCD$, Fig. 1. EF foramen circulare in medio fundo factum, & aqua in hoc vase quiescente prorsus & immota, detrahatur obturaculum a foramine, ut pateat exitus aquæ per foramen.

Tum quoniam aqua hactenus immota fuerit, & jam per foramen effluere incipit, & effluentem sequitur aqua suprapofita, & motus naturalis aquæ nulla desuper affusione perturbatur, & foramen obtinet ipsum fundi medium, induet sese necessario illa aquæ portio, quæ in motu versatur, & versus foramen descendit,

in

in figuram aliquam regularem $AHEFKB$, cujus basis inferior sit ipsum foramen, basis autem superior sit superficies aquæ suprema AB, & sectiones omnes horizontales sint circulares. Hanc vocamus *Cataractam*; qualis autem sit *Cataractæ* figura, nondum disputamus: in præsenti sufficit nostro instituto, ut animadvertamus regularem esse, & per singulas ejus sectiones horizontales eandem aquæ copiam dato tempore transire.

Jam quoniam omnis illa aqua, quæ deorsum fertur, *Cataracta* continetur, patet reliquam aquam $AHEC, BKFD$, quæ extra *Cataractam* sita est, omni motu carere, & penitus quiescere. Itaque in sectione quavis horizontali *Cataractæ* HcK, cujus centrum c, puncta H, K repræsentabunt limites inter aquam descendentem versus foramen, & aquam circumpositam quiescentem.

Porro, cum punctum K sit limes motus & quietis, & particulæ aqueæ, dum moventur inter se, resistentiam patiantur ex defectu lubricitatis, particula aquæ α, Fig. 2. intra *Cataractam* sita, & adjacens puncto K, non poterit nisi quam minima velocitate deorsum ferri. Alioqui, necessario secum abriperet particulam proximam a extra *Cataractam* positam, contra hypothesin. Particula autem β, quæ particulæ α introrsum contigua est, nonnisi quam minima velocitate relativa descendet respectu particulæ α; cum alioqui particulam α accelerando eam secum abriperet, & hæc particula α, jam celerius mota, abriperet secum particulam a. Pariter particula γ magis introrsum posita, & particulæ β contigua, descendet quam minima velocitate relativa respectu particulæ β; & reliquæ particulæ δ, ε, &c. aliæ aliis magis introrsum sitæ, descendent

dent velocitate quam minima relativa reſpectu particularum ſingulis extrorſum adjacentium. Hac autem ratione velocitas abſoluta particularum creſcat neceſſe eſt gradatim a limite verſus centrum *c*, ut velocitas aquæ ſit maxima in ipſo centro, minima in limite utroque *K* & *H*.

Neceſſe vero eſt, ut reſiſtentia, quam experitur particula quæque celerior ex affrictu adjacentis particulæ tardioris extrorſum poſitæ, perpetuo ſibi æqualis ſit per totam ſectionem *Cataractæ*. Alioqui, particula illa, quæ majorem patitur reſiſtentiam, accelerabit particulam tardiorem adjacentem, donec minuatur hoc pacto reſiſtentia, & fiat æqualis illi reſiſtentiæ, quam patiuntur cæteræ particulæ. At ſi reſiſtentia ſit ubique ſibi æqualis per totam *Cataractæ* ſectionem, erit & velocitas relativa particularum ubique æqualis, cum altera alteram neceſſario conſequatur.

Ergo velocitas abſoluta cujuſlibet particulæ, quæ eſt ſumma velocitatum omnium relativarum ab ambitu ſectionis ad eam uſque particulam ſimul ſumptarum, eſt in ratione diſtantiæ ejuſdem particulæ ab ambitu *Cataractæ*.

His expoſitis, ſit modo r radius foraminis, m ad 1 in ratione peripheriæ ad diametrum, mr^2 area foraminis, v velocitas quacum aqua deſcendit in centro foraminis, a altitudo unde cadendo in vacuo comparetur velocitas v, A altitudo aquæ ſupra foramen, V velocitas quæ comparetur cadendo in vacuo ex altitudine A, T tempus cadendi ex eadem, z diſtantia cujuſlibet particulæ a centro foraminis, & effluat aqua tempore T.

Jam *Menſura* aquæ, quæ tempore T ex foramine egreditur, ad hunc modum invenietur.

Erit z radius circuli cujuslibet intra foramen, $2mz$ circumferentia ejusdem, $2mz\dot{z}$ annulus nascens ei circumferentiæ adjacens, $\frac{v\times\overline{r-z}}{r}$ velocitas aquæ in annulo nascente.

Cumque sit $V : v\times\frac{\overline{r-z}}{r} :: 2A : \frac{2Av\times\overline{r-z}}{Vr}$, erit $\frac{2Av\times\overline{r-z}}{Vr}$ spatium, quod conficit aqua per annulum nascentem fluens tempore T, & *Mensura* ejusdem aquæ erit $2mz\dot{z}\times\frac{2Av\times\overline{r-z}}{Vr} = \frac{4mAv\times\overline{rz\dot{z}-z^2\dot{z}}}{Vr}$.

At *Mensura* aquæ per annulum nascentem transeuntis est fluxio *Mensuræ* aquæ transeuntis per circulum, cui radius z. Est itaque *Mensura* aquæ, quæ tempore T transit per hunc circulum, quantitas fluens fluxionis modo expositæ $\frac{4mAv}{Vr}\times\overline{rz\dot{z}-z^2\dot{z}}$, i. e. $\frac{4mAv}{Vr}\times\frac{\overline{3rz^2-2z^3}}{6} = \frac{2mAv}{3Vr}\times\overline{3rz^2-2z^3}$. Et ponendo $z=r$, habebitur *Mensura* aquæ per totum foramen transeuntis tempore T, nempe $\frac{2mAvr^2}{3V}$.

Motus vero aquæ ejusdem sic habebitur.

Mensura

Mensura aquæ tempore T effluentis per annulum nascentem est, ut modo perspeximus, $\frac{4mAv}{Vr}\times$ $\overline{rz\dot{z}-z^2\dot{z}}$, & cum velocitas ejusdem sit $v\times\frac{\overline{r-z}}{r}$, erit ejus *Motus* $\frac{4mAv}{Vr}\times\overline{rz\dot{z}-2z^2\dot{z}}\times\frac{v}{r}\times\overline{r-z}$ $=\frac{4mAv^2}{Vr^2}\times\overline{r^2z\dot{z}-2rz^2\dot{z}\times z^3\dot{z}}$, cujus quantitas fluens est $\frac{4mAv^2}{Vr^2}\times\overline{\frac{r^2z^2}{2}-\frac{2rz^3}{3}+\frac{z^4}{4}}=\frac{mAv^2}{3Vr^2}\times$ $\overline{6r^2z^2-8rz^3+3z^4}$, qui est *Motus* aquæ transeuntis per circulum cui radius z. Et posita $z=r$, habetur *Motus* aquæ effluentis tempore T per totum foramen, $\frac{mAv^2r^2}{3V}$.

Hic autem *Motus*, per solutionem *Problematis* primi, & hypothesin hujus, æqualis est *Motui*, quem columna foramini insistens comparare possit eodem tempore T, suo ipsius pondere per vacuum cadendo, hoc est, *Motui* AFV, sive $AV\times mr^2$. Itaque $\frac{mAv^2r^2}{3V}=mAVr^2$.

Hinc autem $v^2=3V^2$, & $v=V\times\sqrt{3}$.

Porro *Mensura* suprapostita aquæ effluentis per foramen tempore T, nempe $\frac{2mAvr^2}{3V}=\frac{2mAr^2}{3V}$ $\times V\times\sqrt{3}=\frac{2Amr^2}{\sqrt{3}}$. Q. E. I.

 COROLL.

CoROLL. I. Cum ſit $V^2 : v^2 :: A : a$, erit $a = \frac{Av^2}{V^2} = \frac{A}{V^2} \times 3V^2 = 3A$. Itaque altitudo, ad quam aqua in vacuo proſilire poſſit ea velocitate, quacum effluit in centro foraminis, tripla eſt altitudinis aquæ ſuprà foramen.

CoROLL. II. *Cataractæ* figura ad hunc modum definietur:

Sit HK, Fig. 3. quælibet ſectio *Cataractæ*, cujus centrum c, ſitque ejus radius $cK = y$, altitudo aquæ ſupra iſtam ſectionem, ſive $Ic = x$, t tempus cadendi in vacuo ex altitudine x, ſitque, ut prius, $LF = r$, & $IL = A$.

Jam tranſit aqua per hanc ſectionem HK eadem copia atque effluit ex foramine EF.

Quod ſi vas eo uſque decurtetur, ut ejus altitudo redigatur ex IL ad Ic, adeoque ſectio iſta HK jam fiat ipſum foramen in fundo vaſis, tranſibit aqua dato tempore, per hanc ſectionem, copia neque majori, neque minori, atque prius tranſierat per eandem, vaſe nondum decurtato: non majori, quia non urgetur iſta ſectio niſi eodem columnæ ſuperincumbentis pondere, quo prius urgebatur; non minori, quia aqua inferior $HKFE$ non obſtat motui aquæ per ſectionem HK tranſituræ.

Vaſe autem decurtato, *Menſura* aquæ effluentis ex foramine HK tempore t, per ſolutionem præcedentem, eſt $\frac{2xmy^2}{\sqrt{3}}$, & *Menſura* aquæ effluentis tempore T eſt $\frac{2xmy^2}{\sqrt{3}} \times \frac{T}{t} = \frac{2xmy^2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{x}}$. Nam $T : t :: \sqrt{A} : \sqrt{x}$.

Sed,

Sed, ex ſupradictis, *Menſura* aquæ tempore dato T effluentis ex foramine HK vaſe decurtato, æqualis eſt *Menſuræ* aquæ eodem tempore tranſeuntis per ſectionem HK vaſe integro, ſive *Menſuræ* aquæ eodem tempore effluentis ex foramine EF. Itaque $\frac{2xmy^2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{x}} = \frac{2Amr^2}{\sqrt{3}}$, ſive $y^2\sqrt{x} = r^2\sqrt{A}$, vel $y^4 x = r^4 A$, quæ eſt ipſa æquatio curvæ hyperbolicæ, cujus rotatione figuram *Cataractæ* gigni olim oſtendimus in *Actis Philoſophicis* Numero 355.

Scholium I.

Menſura aquæ ſupra inventa $\frac{2Amr^2}{\sqrt{3}}$, ſive $2Amr^2 \times 0{,}577350$ tantillo major eſt *Menſura* $2Amr^2 \times 0{,}571$, quæ ex Cl. *Poleni* experimentis elicitur. Hoc autem differentiæ, aliqua ſaltem ex parte, inde provenit, quod in hoc problemate decrementum *Motus* aquæ ex reſiſtentia ortum pro nihilo habuimus.

Scholium II.

Recte ſe habet *Menſura* aquæ effluentis hac ſolutione definita, ſi altitudinem vaſis pro infinite magna habeamus reſpectu diametri foraminis. Cum vero hæc altitudo finitam rationem obtinet ad diametrum foraminis, paulo minor erit *Menſura*, ita tamen, ut cum altitudo quinquies major ſit diametro, non niſi parte $\frac{1}{32000}$, & cum dupla ſit diametri, non niſi parte $\frac{1}{5120}$ circiter, a vero aberret, quæ differentiæ mi-

nores

nores sunt quam ut ullo experimento deprehendi queant.

Tantillum autem hoc discrimen exinde proficiscitur, quod velocitas supradicta relativa, & proinde ipsa velocitas absoluta particularum aquæ, quas consideravimus ut in directione ad horizontem perpendiculari, revera obtinent directionem paululum obliquam, cum propius ad axem *Cataractæ* accedat quæque particula inter descendendum.

Quod si aliquis desiderio teneatur solutionem veram & accuratam consequendi, cum altitudo aquæ quamcunque rationem obtinet ad diametrum foraminis, eam hunc in modum consequi poterit.

Ex curvæ *Cataracticæ* proprietate corollario secundo hujus problematis exposita, qua $y^4 x = r^4 A$, subtangens hujus curvæ ad ambitum foraminis invenietur $4A$, & ad ambitum cujuslibet sectionis subtangens erit $4x$, æqualis scilicet altitudini aquæ supra illam sectionem quater sumptæ.

Curvam vero ejusmodi *Cataracticam* describit non modo aqua exterior, quæ foraminis ambitum præterfluit, sed etiam illa pars aquæ, quæ per quemlibet foraminis annulum effluit; i. e. unaquæque particula aquea curvam ejusmodi describit.

Sit modo z distantia cujusvis particulæ in foramine positæ, a centro foraminis, & descendat hæc particula per spatium quam minimum in tangente ad curvam *Cataracticam*. Hinc erit ejus velocitas in directione hujus tangentis, sive velocitas $v \times \overline{\frac{r-z}{r}}$, quæ in hoc problemate exposita est, ad velocitatem ejusdem in directione ad horizontem perpendiculari, ut $\sqrt{16A^2 + z^2} : 4A$.

Est

Est itaque velocitas in directione ad horizontem perpendiculari, $v \times \overline{r-z} \times \frac{4A}{\sqrt{16A^2+z^2}}$.

Hinc autem, insistendo vestigiis solutionis superioris, habebis pro *Mensura* aquæ per annulum nascentem transeuntis, $\frac{16mA^2v}{rV} \times \frac{rz\dot{z} - z^2\dot{z}}{\sqrt{16A^2+z^2}}$.

Hujus vero fluxionis quantitas fluens, per Mensuras rationum *Cotesianas*, Form. V. & VI. invenietur

$$\frac{16mA^2v}{rV} \times \overline{\frac{2r-z}{2}\sqrt{16A^2+z^2} + 8A^2 \Big| \frac{z+\sqrt{16A^2+z^2}}{4A}};$$

& ponendo primum $z=0$, deinde $z=r$, habebis

$$\frac{16mA^2v}{rV} \times \overline{\frac{r}{2}\sqrt{16A^2+r^2} - 4Ar + 8A^2 \Big| \frac{r+\sqrt{16A^2+r^2}}{4A}}$$

pro *Mensura* aquæ per totum foramen transeuntis tempore T.

Porro, similem in modum procedendo, habebis pro *Motu* aquæ per annulum nascentem transeuntis, $\frac{64mA^3v^2}{r^2V} \times \frac{r^2z\dot{z} - 2rz^2\dot{z} + z^3\dot{z}}{16A^2+z^2}$, cujus fluxionis quantitas fluens, per Formam I. & II. *Cotesianam*, reperietur

$$\frac{64mA^3v^2}{r^2V} \text{ in } \frac{z^2-4rz}{2} + \frac{r^2}{2}\Big|\frac{16A^2+z^2}{16A^2} - \frac{16A^2}{2}\Big|\frac{16A^2+z^2}{16A^2} + 2r\sqrt{-16A^2}\Big|\frac{z+\sqrt{-16A^2}}{\sqrt{16A^2+z^2}},$$

& ponendo $z=r$, habebis

$$\frac{64mA^3v^2}{r^2V} \text{ in } \frac{r^2-16A^2}{2}\Big|\frac{16A^2+r^2}{16A^2} + 2r\sqrt{-16A^2}\Big|\frac{r+\sqrt{-16A^2}}{\sqrt{16A^2+r^2}} - \frac{3r^2}{2},$$

qui

qui eſt *Motus* aquæ tranſeuntis per foramen tempore T.

Sit jam $M = \frac{r}{2}\sqrt{16A^2 + r^2}$,

$$N = 8A^2 \left| \frac{r + \sqrt{16A^2 + r^2}}{4A} \right., \text{ vel}$$

$$N = 4A^2 \left| \frac{16A^2 + 2r^2 + 2r\sqrt{16A^2 + r^2}}{16A^2} \right.,$$

$$K = \frac{r^2 - 16A^2}{2} \left| \frac{16A^2 + r^2}{16A^2} \right., \text{ \&}$$

$$L = 2r\sqrt{-16A^2} \left| \frac{r + \sqrt{-16A^2}}{\sqrt{16A^2 + r^2}} \right., \text{ vel}$$

$L = 2r \times 4A$ (Rad : Tang : Sec :: $4A$: r : $\sqrt{16A^2 + r^2}$), & *Menſura* aquæ per foramen tranſeuntis tempore T, erit $\frac{16mA^2v}{rV} \times \overline{M + N - 4Ar}$;

Motus vero ejuſdem aquæ erit $\frac{64mA^3v^2}{r^2V} \times \overline{L + K - \frac{3r^2}{2}}$.

Sed $\frac{64mA^3v^2}{r^2V} \times \overline{L + K - \frac{3r^2}{2}} = mr^2AV$, unde

$v^2 = \frac{r^4V^2}{64A^2 \times \overline{L + K - \frac{3r^2}{2}}}$ & *Menſura* aquæ per foramen effluentis tempore T, eſt $2mAr \times \frac{M + N - 4Ar.}{\sqrt{L + K - \frac{3r^2}{2}}}$

Sin

Sin autem pro Mensuris rationum & angulorum adhibere malis series infinitas, erit suprapofita *Mensura* aquæ per annulum nascentem effluentis, $\frac{16mA^2v}{rV} \times \frac{rzz - z^2z}{\sqrt{16A^2+z^2}}$, ad hanc formam reducenda, $\frac{mv}{rV} \times \overline{rz\dot{z} - z^2\dot{z}} \times \frac{16A^2}{\sqrt{16A^2+z^2}}$; & reducendo $\frac{16A^2}{\sqrt{16A^2+z^2}}$ ad seriem infinitam, habebis $\frac{mv}{rV} \times \overline{rz\dot{z} - z^2\dot{z}}$ in $4A - \frac{z^2}{8A} + \frac{3z^4}{8^3A^3} - \frac{5z^6}{4\times8^4A^5} + \frac{35z^8}{8^7A^7}$, — &c. pro *Mensura* aquæ per annulum nascentem effluentis; & per hujus fluxionis quantitatem fluentem, sive per $\frac{mv}{V}$ in $\frac{2Ar^2}{3} - \frac{r^4}{20\times8A} + \frac{r^6}{14\times8^3A^3} - \frac{5r^8}{36\times8^5A^5} + \frac{7r^{10}}{22\times8^7A^7}$, — &c. exponetur *Mensura* aquæ effluentis per foramen integrum.

Porro *Motus* suprapositus aquæ per annulum nascentem transeuntis, $\frac{64mA^3v^2}{r^2V} \times \frac{r^2z\dot{z} - 2rz^2\dot{z} + z^3\dot{z}}{16A^2+z^2}$

$$= \frac{4mAv^2}{r^2V} \times \overline{r^2z\dot{z} - 2rz^2\dot{z} + z^3\dot{z}} \times \frac{16A^2}{16A^2+z^2}$$

$$= \frac{4mAv^2}{r^2V} \times \overline{r^2z\dot{z} - 2rz^2\dot{z} + z^3\dot{z}} \text{ in } 1 - \frac{z^2}{16A^2} + \frac{z^4}{16^2A^4} - \frac{z^6}{16^3A^6} + \frac{z^8}{16^4A^8} - \frac{z^{10}}{16^5A^{10}}, + \&c.$$

Et per fluxionis hujus quantitatem fluentem, sive per $\frac{4mAv^2}{V}$ in $\frac{r^2}{12} - \frac{r^4}{60 \times 16 A^2} + \frac{r^6}{168 \times \overline{16}^2 A^4} - \frac{r^8}{360 \times \overline{16}^3 A^6} + \frac{r^{10}}{660 \times \overline{16}^4 A^8}$ — &c. exponetur *Motus* aquæ per foramen integrum effluentis.

Ergo $Amr^2 V = \frac{4mAv^2}{V}$ in $\frac{r^2}{12} - \frac{r^4}{60 \times 16 A^2} +$, &c.

sive $V^2 = v^2$ in $\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} +$, &c. vel

$$v^2 = \frac{V^2}{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c.}$$

$$\& \; v = \frac{V}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c.}}$$

Unde *Mensura* aquæ effluentis per foramen, sive

$$\frac{mv}{V} \text{ in } \frac{2Ar^2}{3} - \frac{r^4}{20 \times 8 A} + \frac{r^6}{14 \times 8^3 A^3} - \frac{5 r^8}{36 \times 8^5 A^5} + \&c$$

$$= \frac{m}{V} \text{ in } \frac{2Ar^2}{3} - \frac{r^4}{20 \times 8 A} + \frac{r^6}{14 \times 8^3 A^3} - \frac{5 r^8}{36 \times 8^5 A^5} + \&c$$

$$\times \frac{V}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c.}}$$

$$= m \text{ in } \frac{\frac{2Ar^2}{3} - \frac{r^4}{20 \times 8 A} + \&c.}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c.}}$$

Unde tandem *Mensura* aquæ effluentis per foramen habetur $\frac{2Amr^2}{\sqrt{3}}$ in $1 - \frac{r^2}{20 \times 16 A^2} + \frac{r^4}{56 \times \overline{16}^2 A^4}$ — &c

Hinc

Hinc ponendo A infinitam respectu diametri foraminis, evadit *Mensura* $= \frac{2Amr^2}{\sqrt{3}}$, ut in *Problemate* hoc determinavimus.

Cum $A = 10r$, *Mensura* $= \frac{2Amr^2}{\sqrt{3}} \times \overline{1 - \frac{1}{32000}}$ circiter.

Cum $A = 4r$, *Mensura* $= \frac{2Amr^2}{\sqrt{3}} \times \overline{1 - \frac{1}{5120}}$ circiter.

Poteſt itaque loco veræ *Menſuræ* adhiberi *Menſura* $\frac{2Amr^2}{\sqrt{3}}$, ſine periculo ſenſibilis erroris, etiam in tantula altitudine, multo magis in altitudine multis vicibus majori, qualis fere in experimentis adhiberi conſuevit; & hoc pacto computus ex operoſo admodum & intricato facillimus evadit.

PROBLEMA III.

Iiſdem poſitis, & negligendo accelerationem aquæ extra foramen, determinare diametrum venæ aqueæ ad parvam diſtantiam extra foramen, ubi vena maxime contrahitur, & velocitatem aquæ in vena ſic contracta.

In problematis ſuperioris ſolutione oſtenſum fuit, particulas aqueas ex foramine erumpentes non una omnibus communi velocitate proſilire, ſed eo velocius ferri, quo propius abſunt a centro foraminis; & velocitatem relativam particularum interiorum, reſpectu particularum ſingulas extrorſum contingentium, con-

ſtanter ſibi æqualem fieri per totum foramen; & relativam hanc velocitatem proficiſci ex reſiſtentia, quam ab aqua circumpoſita patitur aqua verſus foramen deſcendens.

At poſtquam aqua ex foramine egreſſa eſt, ejuſque ſuperficies exterior nullam jam patitur reſiſtentiam ab aqua circumpoſita, nec etiam ab aëre ambiente, quippe quæ ex hypotheſi per vaçuum feratur, fieri nequit ut amplius perſtet illa velocitas relativa, aut velocitatis abſolutæ inæqualitas. Jam enim particulæ celeriores accelerent neceſſe eſt particulas tardiores contiguas, & ipſæ viciſſim a tardioribus retardentur, donec univerſæ unicam velocitatem ſortitæ fuerint particulis omnibus communem; quod intra parvum ſpatium fiet, poſtquam ex foramine fuerint egreſſæ.

Dum vero communem hanc velocitatem conſequuntur omnes particulæ, contrahitur neceſſario venæ diameter. Similiter nempe hic res accidit, atque cum flumen rapidius cum tardiori, *Rhodanus* puta cum *Arare*, conjungitur. In alveo communi par eſt velocitas aquæ ex utroque flumine advectæ, & pari copia tranſmittitur aqua per ſectionem hujus alvei, atque prius tranſmiſſa fuerat per ſectiones fluminum amborum: Sed longe minor eſt *Rhodani* ſectio poſt *Ararim* receptum, quam ſumma ſectionum *Rhodani* & *Araris*, priuſquam confluant.

Sit igitur venæ aqueæ contractæ, ubi omnes particulæ in eadem venæ ſectione ſitæ æqualem velocitatem adeptæ fuerint, radius ϱ, & communis iſta velocitas vocetur v.

Jam *Menſura* aquæ per venæ contractæ ſectionem transfluentis tempore T ſic habebitur.

Eſt

Eſt $V : \upsilon :: 2A : \frac{2A\upsilon}{V}$, quæ eſt longitudo venæ aqueæ per hanc ſectionem tranſeuntis tempore T. Eſtque $\frac{2A\upsilon}{V} \times m\varrho^2$ *Menſura* aquæ per hanc ſectionem tranſeuntis eodem tempore.

Et *Motus* aquæ per ſectionem venæ tranſeuntis tempore T, eſt $\frac{2A\upsilon}{V} \times m\varrho^2 \times \upsilon$, ſive $\frac{2Am\varrho^2\upsilon^2}{V}$.

Atqui *Menſura* aquæ per venæ ſectionem tranſeuntis æqualis eſt *Menſuræ* aquæ per foramen eodem tempore effluentis, hoc eſt, $\frac{2Am\varrho^2\upsilon}{V} = \frac{2Amr^2}{\sqrt{3}}$, ſive $2\varrho^2\upsilon = \frac{2r^2V}{\sqrt{3}}$.

Porro *Motus* aquæ ex foramine erumpentis, cum non mutetur ex actione particularum inter ſe, æqualis erit *Motui* aquæ per venæ ſectionem transfluentis, hoc eſt $AVmr^2 = \frac{2Am\varrho^2\upsilon^2}{V}$, ſive $2\varrho^2\upsilon^2 = r^2V^2$.

Eſt autem $\upsilon = \frac{2\varrho^2\upsilon^2}{2\varrho^2\upsilon} = r^2V^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2r^2V}$, hoc eſt $\upsilon = \frac{V\sqrt{3}}{2}$, & $\upsilon^2 = \frac{3V^2}{4}$.

Et $\varrho^2 = \frac{r^2V^2}{2\upsilon^2} = \frac{r^2V^2}{2} \times \frac{4}{3V^2}$, ſive $\varrho^2 = \frac{2r^2}{3}$, & $\varrho = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Q. E. I.

COROLL. Cum ſit $\upsilon^2 = \frac{3V^2}{4}$, altitudines autem ſint in ratione duplicata velocitatum inde cadendo geni-

genitarum, patet eam esse velocitatem aquæ in vena contracta, qua sursum prosilire queat in vacuo ad tres quartas partes altitudinis aquæ supra foramen.

SCHOLIUM I.

Mirabilem hanc venæ aqueæ contractionem primus omnium, ante annos fere 30, animadvertit *Newtonus*, cum occasione difficultatum quarundam ab altero illo *Britanniæ* lumine, & amico nostro nullis unquam lacrymis satis deflendo, *Rogero Cotesio*, propositarum, qui tunc temporis secundam *Principiorum* editionem adornabat, attentius in motum aquæ effluentis introspiceret: eandem postea pluribus experimentis confirmavit *Polenus*. Exinde philosophorum ingenia satis superque exercuit hoc phænomenon: sed omnes hactenus latuit vera causa hujus contractionis.

Radius autem venæ hoc problemate definitus, nempe $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, sive $r \times 0{,}8165$, paulo minor est radio $r \times 0{,}84$, quanta a *Newtono* traditur; paulo major radio $r \times 0{,}78$, qualis fere *Poleno* mensuranti contigit, estque pene inter utramque intermedia.

At velocitas supra determinata $\frac{V\sqrt{3}}{2}$, qua prosilire sursum possit aqua ad tres quartas partes altitudinis vasis supra foramen, longe abest ab experimentis, quibus reperiuntur fontes salientes ad integram fere cisternæ altitudinem adsurgere. Provenit autem istud velocitatis discrimen ex aëris ambientis resistentia, quæ tantum abest ut minuat altitudinem salientium, quod vulgo creditur, eandem non parum auget, id quod ex *Problematis* septimi solutione patebit.

SCHO-

SCHOLIUM II.

Ex iis, quæ supra exposuimus in *Scholio* 2. *Problematis* II. patet valores hosce ipsarum ϱ & υ, pro accuratis haberi non posse, nisi altitudo aquæ pro infinita habeatur respectu diametri foraminis, proxime tamen ad veros valores accedere, si altitudo aquæ sit diametri foraminis dupla, aut duplo major. Quod si eosdem valores accurate velis determinare, adhibere poteris *Mensuram* eodem *Scholio* definitam, sive $2mAr \times \frac{\overline{M+N-4Ar}}{\sqrt{L+K-\frac{3}{2}r^2}}$, unde habebis $\upsilon = \frac{rV}{2} \times \frac{\sqrt{L+K-\frac{3}{2}r^2}}{M+N-4Ar}$

& $\varrho = \sqrt{2 \times \frac{M+N-4Ar}{\sqrt{L+K-\frac{3}{2}r^2}}}$. Poteris etiam adhibere series infinitas eodem *Scholio* expositas.

PROBLEMA IV.

Aqua in vacuum effluente ex foramine circulari in medio fundo vasis cylindrici, ubi particulæ aquæ inter defluendum intra vas tantam patiuntur resistentiam ex defectu lubricitatis, ut inde notabiliter imminuatur Motus *aquæ, & data* Mensura *aquæ effluentis, definire* Motum *ejusdem, & velocitatem qua per medium foramen egreditur.*

Sit data *Mensura* aquæ tempore T effluentis, $2mr^2Aq$. Huic ergo æqualis erit *Mensura* per analysin designata in solutione *Problematis* secundi, nempe

nempe $\frac{2mr^2Av}{3V}$, hoc est $2mr^2Aq = \frac{2mr^2Av}{3V}$ sive $v = 3Vq$.

Motus vero ejusdem aquæ per analysin designatus in eodem *Problemate*, est $\frac{mr^2Av^2}{3V}$; & loco v^2 substituendo ejus valorem modo inventum, fit is *Motus* $\frac{mr^2A}{3V}\times 9V^2q^2 = 3q^2mr^2AV$. Q.E.I.

Coroll. Si ex *Motu*, qui tempore T generari possit a columna aquea foramini insistente, sive ex mr^2AV, detrahatur *Motus* aquæ eodem tempore effluentis, $3q^2mr^2AV$, relinquitur *Motus* tempore T ex resistentia deperditus $mr^2AV\times\overline{1-3q^2}$.

Scholium.

Si accuratam solutionem desideres, recurrendum est ad Scholium secundum Probl. II. hunc in modum; $2mr^2Aq = \frac{16mA^2v}{rV}\times\overline{M+N-4Ar}$, unde $v = Vq\times\frac{r^3}{8A\times\overline{M+N-4Ar}}$. Et *Motus* aquæ effluentis tempore T, erit $mr^2AV\times q^2r^2\times\frac{\overline{L+K-\frac{3}{2}r^2}}{\overline{M+N-4Ar}|^2}$: unde *Motus* ex resistentia deperditus tempore T, erit $mr^2AV\times\overline{1-\frac{q^2r^2\times\overline{L+K-\frac{3}{2}r^2}}{\overline{M+N-4Ar}|^2}}$.

PPOBLEMA V.

Iisdem positis datisque, & negligendo accelerationem aquæ extra foramen, determinare diametrum venæ aqueæ ad parvam distantiam extra foramen, ubi vena maxime contrahitur, & velocitatem aquæ in vena sic contracta.

Per tertium *Problema*, *Mensura* aquæ per sectionem venæ transeuntis tempore T est $\frac{2m\varrho^2 A v}{V}$: hæc autem æqualis est *Mensuræ* datæ $2mr^2 Aq$; unde $\varrho^2 v = r^2 Vq$.

Porro, per idem *Problema* tertium, *Motus* aquæ per sectionem venæ transeuntis tempore T, est $\frac{2m\varrho^2 Av^2}{V}$, cui æqualis est *Motus* superiore problemate definitus, $3q^2 mr^2 AV$, unde $2\varrho^2 v^2 = 3q^2 r^2 V^2$.

Est autem $v = \frac{2\varrho^2 v^2}{2\varrho^2 v} = \frac{3q^2 r^2 V^2}{2qr^2 V} = \frac{3qV}{2}$.

Et $\varrho^2 = \frac{r^2 Vq}{v} = r^2 Vq \times \frac{2}{3qV} = \frac{2r^2}{3}$; unde $\varrho = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Q.E.I.

COROLL. I. Eadem perstat ratio inter radium foraminis & radium venæ contractæ, sive minuatur utcunque per resistentiam *Motus* aquæ effluentis, ut in hoc *Problemate*, sive non minuatur, ut in *Problemate* III. cum sit utrobique $\varrho = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Coroll. 2. Cum minuitur per resistentiam *Motus* aquæ effluentis, minuitur simul velocitas in vena contracta. Cum enim in *Problemate* tertio fuerat $v = \frac{V\sqrt{3}}{2}$, fit modo $v = \frac{3qV}{2}$, hoc est, minuitur v ex $V \times 0,866$ ad $V \times 0,856$ sumendo $q = 0,571$ ex *Poleni* experimentis.

Scholium.

Accurate erit $v = V \times r^2 q \times \frac{\overline{L + K - \frac{3}{2} r^2}}{\overline{M + N - 4Ar}|^2}$,

eritque $\varrho = \sqrt{2} \times \frac{\overline{M + N - 4Ar}}{\sqrt{L + K - \frac{3}{2} r^2}}$, pariter atque inventum est in *Scholio* secundo *Problematis* tertii.

Problema VI.

Aqua in aërem effluente per foramen circulare in medio fundo vasis cylindrici, ubi particulæ aquæ inter defluendum intra vas tantam patiuntur resistentiam ex defectu lubricitatis, ut inde notabiliter minuatur Motus *aquæ, & data* Mensura *aquæ effluentis, definire* Motum *ejusdem, & velocitatem qua per medium foramen egreditur.*

Sit data *Mensura* aquæ tempore T effluentis $2mr^2Aq$, ut in *Problemate* IV. & ope ejusdem *Problematis* habebitur *Motus* ejusdem $3q^2mr^2AV$, & velocitas quacum egreditur per centrum foraminis, sive $v = 3qV$. Q. E. I.

Coroll.

Coroll. Cum detur q, est v ut V, hoc est, ut $\surd A$.

Scholium.

Hæc eadem accurate definita reperies in *Scholio Problematis* IV.

Problema VII.

Aqua in aërem effluente, negligendo accelerationem aquæ extra foramen ex gravitate ortam, si dentur duæ quælibet ex tribus sequentibus, nempe Mensura *aquæ effluentis, velocitate in axe venæ contractæ, & diametro ejusdem venæ, reliquam determinare.*

Cum aqua ex foramine erumpens per vacuum fertur, ostensum est in solutione *Problematis* III. æqualem fieri velocitatem particularum aquæ per totam sectionem venæ contractæ: Nunc autem, cum vena per aërem fertur, tollitur necessario æqualitas ista velocitatis. Partes enim venæ exteriores aërem circumjacentem in motum concitant, atque ab eodem ipsæ retardantur, adeo ut parem cum reliquis velocitatem adipisci nequeant. Partes autem extimæ, cum ab aere retardentur, partes contiguas interiores retardant, hæque proximas; atque eo pacto fit, ut particula quæque interior celerius feratur particula contigua exteriore, adeo ut velocitas maxima sit in axe venæ, in ambitu minima. Et cum partes exteriores tardius ferantur per aërem, quam, sublato aëre, per vacuum ferrentur, inde fit ut partes mediæ velocius

ferantur, aëre venam ambiente, quam ferrentur aëre sublato. Qua de causa mediæ partes aquæ in fontibus salientibus multo altius adsurgunt in aëre aperto, quam in vacuo essent adscensuræ, prout monuimus sub finem *Schol.* 1. *Probl.* III.

Porro, eæ partes aeris, quæ venæ aqueæ sunt contiguæ, cum ab aqua in motum concitentur, ipsæ alias sibi extrorsum adjacentes in motum concitant, hæque proximas exteriores, & illæ reliquas successive ad certam aliquam distantiam ab ambitu venæ.

Velocitas autem particularum aquæ ab axe venæ ad ambitum ejusdem ita decrescat, necesse est, ut particulæ cujusque ubicunque sitæ una eademque sit velocitas relativa respectu particulæ extrorsum adjacentis, iisdem ex causis quas exposuimus in solutione *Problematis* secundi. Nam si quævis particula velocitatem relativam majorem habeat quam reliquæ, ea majorem experietur resistentiam ex attritu particulæ extrorsum adjacentis, & eo pacto ad æqualem cum ceteris velocitatem relativam perducetur. Pari modo particula quæque aeris circumpositi, qui in motum concitatur, unam eamdemque habebit velocitatem relativam respectu particulæ aëreæ extrorsum adjacentis.

At longe discrepat velocitas relativa particularum aquearum inter se, a velocitate relativa particularum aeris, quod hoc modo concipi potest.

Particula quævis aquæ in extima vena constituta, a particula aquæ introrsum proxima sollicitatur ad motum accelerandum; eadem a particula proxima aeris retardatur: & cum particula ista extima justam velocitatem adepta sit, pares sint, necesse est, hæ duæ vires contrariæ, quarum altera retardat particulam, altera

acce-

accelerat. Id vero fieri non poteſt, niſi factum ex velocitate relativa & denſitate particulæ aqueæ accelerantis, æquale ſit facto ex velocitate relativa & denſitate particulæ aereæ retardantis. Eſt autem denſitas aeris ad denſitatem aquæ, ut 1 ad 900 circiter. Itaque velocitas relativa inter extimam particulam aqueam & proximam aeream, eſt ad velocitatem relativam inter duas proximas particulas aqueas, ut 900 ad 1 circiter.

Porro, particula iſta intima aerea ad motum accelerandum ſollicitatur a proxima contigua particula aquea, retardatur a particula aerea extrorſum proxima. Cumque hic etiam vires duæ contrariæ ſibi invicem æquales ſint, erit factum ex denſitate & velocitate relativa particulæ aqueæ accelerantis, æquale facto ex denſitate & velocitate relativa particulæ aereæ retardantis. Unde erit velocitas relativa, quæ eſt inter duas iſtas particulas aereas, ad velocitatem relativam, quæ eſt inter particulam intimam aeream & proximam aqueam, ut 900 ad 1 circiter; eritque eadem ad velocitatem relativam, quæ eſt inter duas proximas particulas aqueas, ut 900×900 ad 1 fere: & hæc tanta velocitas relativa perpetuo ſibi conſtabit per totam craſſitiem annuli aerei, qui ab aqua profluente in motum concitatur.

Deſignentur jam literis r, m, v, a, V, A, T, eadem atque in ſecundo Problemate literis iiſdem ſignificantur. Eſto etiam υ velocitas aquæ in axe venæ aqueæ contractæ, ϱ radius ejuſdem venæ, R radius venæ imaginariæ, per quem velocitas υ, decreſcendo gradatim, pari modo atque decreſcit in vena vera, tandem ad nihilum redigatur.

Sit

Sit etiam *Menſura* aquæ tempore T effluentis per foramen, $2qmr^2A$.

Jam *Menſura* aquæ eodem tempore fluentis per venam contractam, methodo in *Problemate* II. expoſita, invenietur $\frac{2mAv\varrho^2}{3RV} \times \overline{3R-2\varrho}$.

Hæ autem *Menſuræ* æquales ſunt, hoc eſt, $2qmr^2A = \frac{2mAv\varrho^2}{3RV} \times \overline{3R-2\varrho}$, ſive, $3qr^2RV = v\varrho^2 \times \overline{3R-2\varrho}$.

Porro, cum *Menſura* aquæ effluentis per foramen tempore T ſit $2qmr^2A$, *Motus* ejuſdem, per *Problema* VI. eſt $3q^2mr^2AV$.

Et *Motus* aquæ per venam fluentis eodem tempore, per methodum *Problemate* ſecundo uſurpatam, invenitur $\frac{mAv^2 \times \overline{6R^2\varrho^2 - 8R\varrho^3 + 3\varrho^4}}{3VR^2}$.

Hi autem æquales ſunt, hoc eſt, $3q^2mr^2AV = \frac{mAv^2 \times \overline{6R^2\varrho^2 - 8R\varrho^3 + 3\varrho^4}}{3VR^2}$, ſive, $9q^2r^2R^2V^2 = v^2 \times \overline{6R^2\varrho^2 - 8R\varrho^3 + 3\varrho^4}$.

Duabus his æquationibus rite reductis ad expungendam R, pervenitur ad æquationem ſequentem, $\varrho^4v^2 = 2qvVr^2\varrho^2 + 12q^2V^2r^2\varrho^2 - 9q^2V^2r^4$, unde $\varrho^2 = \frac{qVr^2}{v^2} \times \overline{v + 6qV - 2\sqrt{3qvV + 9q^2V^2 - 2v^2}}$, & hinc obtinetur ipſe ϱ, ſive radius venæ contractæ, cum dantur q & v.

Porro,

Porro, ex eadem æquatione elicitur, $v = \frac{qVr}{\varrho^2} \times \overline{r + 2\sqrt{3\varrho^2 - 2r^2}}$.

Denique, $q = \frac{\varrho^2 v}{rV \times \overline{r + 2\sqrt{3\varrho^2 - 2r^2}}}$. Q. E. I.

SCHOLIUM I.

Supra poſuimus *Motum* aquæ per venam contractam fluentis æqualem *Motui* effluentis per foramen. Id autem, ſi rigorem Mathematicum ſpectes, non eſt verum. *Motus* enim aquæ per foramen effluentis aqualis eſt *Motui* aquæ per venam contractam fluentis, & *Motui* annuli aerei venam ambientis, qui aer ab aqua per venam fluente in motum concitatur, ſimul ſumptis. Sed annuli aerei *Motum*, cum ejus annuli craſſities non ſit major quam $\frac{R - \varrho}{900 \times 900}$, ejuſque denſitas non ſit major parte $\frac{1}{900}$ denſitatis aquæ, pro nihilo habemus; idque faciendo æquationes longe ſimpliciores reddimus quam alioqui eſſent futuræ.

SCHOLIUM II.

Per *Corollarium* 1. *Problematis* V. cum aqua in vacuum effluit, eadem ſemper perſtat ratio inter radium foraminis & radium venæ contractæ, ſive minuatur utcunque per reſiſtentiam *Motus* aquæ effluentis, ſive non minuatur. Unde, ut in re phyſica, veri ſimillimum cenſemus, datam haberi rationem

inter

inter hos radios, etiam cum aqua per aerem profluit, utcunque minuatur *Motus* aquæ effluentis per resistentiam, aut saltem eam rationem non nisi quam minimum mutari. Idque cum reperiatur contentaneum experimentis hactenus factis, quod infra clarius apparebit, nos pro vero habebimus, donec experimenta in posterum accuratius instituenda aliquid certius docuerint.

Porro, si datur ratio inter r & ϱ, datur etiam ratio inter r & R, sive ratio inter radium foraminis, & radium imaginarium, per quem velocitas v gradatim decrescendo ad nihilum redigitur.

Nam, eliminando v ex æquationibus duabus supra positis, $9q^2r^2R^2V^2 = \varrho^2v^2 \times \overline{6R^2 - 8R\varrho + 3\varrho^2}$, & $3qr^2RV = \varrho^2 v \times \overline{3R - 2\varrho}$, pervenitur ad æquationem, $\varrho^2 \times \overline{9R^2 - 12R\varrho + 4\varrho^2} = r^2 \times \overline{6R^2 - 9R\varrho + 3\varrho^2}$, unde $R = \frac{\varrho}{3} \times \overline{2 + \frac{r}{\sqrt{3\varrho^2 - 2r^2}}}$.

Præterea, ex altera harum æquationum, $3qr^2RV = \varrho^2 v \times \overline{3R - 2\varrho}$, fit $3r^2R : \varrho^2 \times \overline{3R - 2\varrho} :: v : qV$, & cum data sit ratio prior, datur etiam ratio posterior, hoc est, datur quantitas $\frac{v}{qV}$.

Quantæ autem sint tres hæ rationes datæ, postea demonstrabimus.

Reliqua proximo Transactionum Numero communicabimus.

III. *Dias*

Fig. 1.

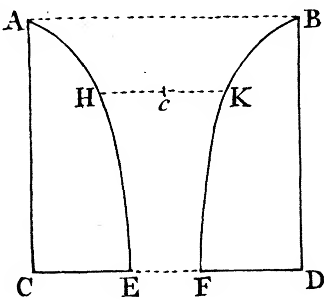

Fig. 2.

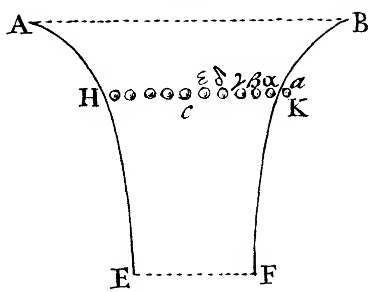

Fig. 3.